IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی قزوین

دانشکدهٔ فنی و مهندسی

طراحی الگوریتم

(سومین ترم کرونا)

توابع بازگشتی

نستوه طاهری جوان

nastooh@aut.ac.ir

مفهوم رابطهٔ بازگشتی

- در یک دنباله از مقادیر به صورت زیر:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

اگر جملهٔ عمومی این دنباله از روی اعضای پیشین قابل محاسبه باشد، یک رابطهٔ بازگشتی در اختیار داریم.

- مثال:

آیا می توانید چند جملهٔ اول رابطهٔ بازگشتی زیر را بیابید؟

$$\begin{cases} a_n = n\, a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

به عنوان مثال عنصر پنجم برابر با ۱۲۰ است. آیا این رابطه همان فاکتوریل را نشان نمی دهد؟

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- منظور از حل روابط بازگشتی آن است که جملهٔ عمومی رابطه را به صورت مستقیم بر حسب n به دست آوریم.

- به عنوان مثال، از اسلاید قبل داریم:

$$\begin{cases} a_n = n\,a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = n!$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

مثال: آیا می توانید رابطه بازگشتی زیر را با مقدار دهی به دست آورید؟

$$\begin{cases} a_n = 2\, a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

به راحتی چند جملهٔ اول را به صورت زیر خواهیم داشت:

$a_1= 1$, $a_2=3$, $a_3= 7$, $a_4=15$, ...

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_n = 2\, a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \; a_n = 2^n - 1$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

حل روابط بازگشتی با جایگذاری

برای مسائل ساده ای که a_n فقط به a_{n-1} وابسته است، می توان از روش جایگذاری استفاده کرد.

برای این منظور باید چند جملهٔ اول را با جایگذاری به دست آورد، سپس جملهٔ عمومی را بر حسب n حدس زد.

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

حل روابط بازگشتی با جایگذاری

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

به راحتی چند جملهٔ اول را به صورت زیر خواهیم داشت:

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$, ...

پس خواهیم داشت:

$a_n = 3n - 2$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

حل روابط بازگشتی با جایگذاری

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

حل روابط بازگشتی با جایگذاری

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

برای چند جملهٔ اول خواهیم داشت:

a1=2, a2=4, a3=7, a4=11, a5=16, ...

در نتیجه:

$$a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

نکتهٔ مهم:

در حالت کلی یک روش یکسان و عمومی برای حل روابط بازگشتی، وجود ندارد.

حل روابط بازگشتی

چند تعریف:

- روابط همگن در برابر روابط ناهمگن

در روابط همگن، جملهٔ عمومی فقط وابسته به یک (یا چند) جملهٔ پیشین است و هیچ عنصر غیر وابسته ای ندارد!

مثال:

$$a_n = 2a_{n-1}$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

نا همگن

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + n$$

نا همگن

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

چند تعریف:

- درجه (مرتبهٔ) یک رابطه

یک رابطهٔ بازگشتی از درجهٔ k است اگر جملهٔ عمومی آن به k عنصر پیشین وابسته باشد.

مثال:

$a_n = 2a_{n-1}$ همگن، درجهٔ اول

$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$ همگن، درجهٔ دوم

$a_n = 2a_{n-1} + 3$ ناهمگن، درجهٔ اول

$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + n$ ناهمگن، درجهٔ دوم

$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 3a_{n-3}$ همگن، درجهٔ سوم

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

چند تعریف:

- رابطهٔ خطی در برابر رابطهٔ غیر خطی

یک رابطهٔ بازگشتی از نوع خطی است اگر جملهٔ عمومی فقط به مضربهای ساده ای از جملات قبلی وابسته باشد (و نه توان های آنها)

مثال:

همگن، خطی، درجهٔ اول

$a_n = 2a_{n-1}$

غیر همگن، غیر خطی، درجهٔ دوم

$$a_n = 4a_{n-1} + 2a_{n-2}^2 + 3n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی درجه اول، همگن یا غیر همگن

این روابط عموماً با جایگذاری ساده قابل حدس هستند.

قبلا مثال داشتیم!

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

فرم کلی این روابط به صورت زیر است:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$$

مثال:

$$a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

که می توان آن را به فرمت زیر تبدیل کرد:

$$a_n \; -4a_{n-1} -3a_{n-2} = 0$$

برای حل این روابط، باید به کمک ضرایب رابطه، ***معادلهٔ مشخصهٔ*** رابطه را نوشت.

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

تعریف معادلهٔ مشخصه:

برای معادله به فرم زیر:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$$

معادلهٔ مشخصه را اینگونه تعریف میکنیم:

$$C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$$

حال باید این معادلهٔ درجه دو را حل کنیم. که دو حالت زیر رخ خواهد داد:

۱) معادله دو پاسخ حقیقی و مجزا (r_1 و r_2) دارد.

۲) معادله یک ریشهٔ مضاعف(r_1) دارد.

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

۱) در حالت اول که معادله دو پاسخ حقیقی و مجزای (r_1 و r_2) را دارد، پاسخ رابطهٔ بازگشتی فرمتی مانند زیر دارد:

$$a_n = C_1\, r_1^n + C_2\, r_2^n$$

۲) در حالت دوم که معادله یک ریشهٔ مضاعف(r_1) دارد، پاسخ رابطهٔ بازگشتی فرمتی مانند زیر دارد:

$$a_n = C_1\, r_1^n + C_2\, n\, r_1^n$$

در هر دو حالت باید پس از مشخص شدن فرمت پاسخ، به کمک مقادیر اولیهٔ رابطه، C_1 و C_2 را به دست آورد

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

یادآوری: برای حل باید مراحل پنج گانه زیر را انجام داد:

1. ابتدا رابطه را به فرم کلی بازنویسی کرد.
2. پس از آن معادلهٔ مشخصهٔ آن را نوشت.
3. در ادامه ریشه های معادلهٔ مشخصه را پیدا کرد.
4. سپس بر اساس نوع ریشه های معادله، فرمت نهایی پاسخ را مشخص کرد.
5. در انتها ضرایب موجود در فرمت را به کمک مقادیر اولیه رابطه تعیین کرد.

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

مرحلهٔ اول: باز نویسی معادله به فرم کلی:

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$

مرحلهٔ دوم: نوشتن معادلهٔ مشخصه:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

مرحلهٔ سوم: یافتن ریشه های معادلهٔ مشخصه

$$r_1 = 2,\ \ r_2 = -1$$

مرحلهٔ چهارم: فرمت نهایی پاسخ:

$$a_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

مرحلهٔ پنجم: یافتن ضرایب C_1 و C_2

از روی مقادیر اولیه رابطه و به کمک فرمت نهایی پاسخ داریم:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = 2 &\Rightarrow C_1\times2^0 + C_2\times(-1)^0 = 2 \Rightarrow C_1+C_2 = 2 \\ a_1 = 7 &\Rightarrow C_1\times2^1 + C_2\times(-1)^1 = 7 \Rightarrow 2C_1-C_2 = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1=3,\ C_2=-1$$

جواب نهایی : $a_n = 3\times2^n - (-1)^n$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

فرم کلی رابطه:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

معادلهٔ مشخصه:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

معادلهٔ مشخصه ریشهٔ مضاعف دارد: $r = 2$

پس پاسخ کلی رابطه به فرمت زیر است:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ دوم، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

برای پیدا کردن ضرایب پاسخ داریم:

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 \times 2^0 + C_2 \times 0 \times 2^0 = 1 \quad \Rightarrow C_1 = 1$$

$$a_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 \times 2^1 + C_2 \times 1 \times 2^1 = 3 \quad \Rightarrow 2C_1 + 2C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 0.5$$

جواب نهایی : $a_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ اول، با ضرایب ثابت

فرم کلی آنها به صورت زیر است:

$$a_n + Ca_{n-1} = 0$$

مثال:

$$a_n = 5a_{n-1}$$

که می توان آن را به فرم زیر نوشت:

$$a_n - 5a_{n-1} = 0$$

این روابط را قبلا با کمک جایگذاری حل میکردیم.

اکنون می توان نتیجه گرفت که این روابط حالت خاصی از روابط بازگشتی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت هستند. (رجوع به صفحهٔ بعد)

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ اول، با ضرایب ثابت

برای روابط به فرم زیر:

$$a_n + Ca_{n-1} = 0$$

معادلهٔ مشخصه این چنین خواهد شد:

$$r + C = 0 \Rightarrow r = -C$$

و پاسخ این روابط خواهد بود:

$$a_n = a_0 r^n = a_0(-c)^n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ اول، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} \\ a_2 = 98 \end{cases}$$

فرم کلی رابطه را داریم:

$a_n - 7a_{n-1} = 0$

پس معادله مشخصه آن برابر است با:

$r - 7 = 0$

پس داریم:

$r = 7$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ اول، با ضرایب ثابت

مثال:

رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} \\ a_2 = 98 \end{cases}$$

بنابراین پاسخ نهایی به فرمت زیر است:

$$a_n = (7)^n a_0$$

حال باید a_0 را به دست بیاوریم (از روی a_2):

$$a_2 = 7^2 a_0 \Rightarrow 98 = a_0 7^2 \Rightarrow a_0 = 2$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$an = 2(7)^n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی همگن، مرتبهٔ سوم و بالاتر

روال کار همانند مرتبهٔ دوم است. یعنی معادلهٔ مشخصه ای وجود دارد و بر اساس ریشه های آن جواب عمومی به دست می آید.

اما در این درس عموماً فقط تا روابط مرتبهٔ دوم بررسی می شوند.

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن، با ضرایب ثابت
  - روابط بازگشتی ناهمگن را به فرم کلی زیر می توان نوشت:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n)$$

که $f(n)$ یک تابع غیر صفر است

  - مثال: رابطهٔ $a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2} + 3n$ را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$a_n - 5a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3n$$

  - نکته در مورد $f(n)$: یکی از موارد **<u>بسیار متداول</u>** $f(n)$ به صورت زیر است:

$$p(n).b^n$$

که در آن $p(n)$ یک چند جمله ای بر حسب n و از درجهٔ d و b یک عدد ثابت است.

مثال:

$$n6^n$$

که در آن $d=1$ و $b=6$ است.

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن، با ضرایب ثابت
  - برای روابط بازگشتی به فرم زیر

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} + \ldots + C_{n-k} a_{n-k} = p(n).b^n$$

معادلهٔ مشخصه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\underbrace{(C_n r_k + C_{n-1} r_{k-1} + \ldots + C_{n-k})}_{\text{همانند حالت همگن}} (r-b)^{d+1} = 0$$

- مثال: رابطهٔ $a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2} + 3n$ را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$a_n - 5a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3n$$

- مثال: معادلهٔ مشخصهٔ رابطهٔ زیر را می نویسیم:

$$a_n - 3a_{n-1} = (8n+7)4^n$$

داریم: $d=1$ و $b=4$، پس معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است:

$$(r-3)\ (r-4)^2 = 0$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن، با ضرایب ثابت
  - مثال: معادلهٔ مشخصهٔ رابطهٔ مقابل را بنویسید:

$$a_n - 3a_{n-1} = 4^n$$

داریم:

$d=0$ و $b=4$

پس معادلهٔ مشخصه برابر است با:

$$(r - 3)\ (r - 4) = 0$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن، با ضرایب ثابت

  - مثال: معادلۀ مشخصۀ رابطۀ مقابل را بنویسید:

$$a_n = 4_{n-1} + 4a_{n-2} + 3^n(2n+1)$$

ابتدا به فرم کلی بازنویسی میکنیم:

$$a_n - 4_{n-1} - 4a_{n-2} = 3^n(2n+1)$$

داریم: $d=1$ و $b=3$

پس معادلۀ مشخصه برابر است با:

$$(r^2 - 4r - 4)\ (r - 3)^2 = 0$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن، با ضرایب ثابت

پس از نوشتن معادلهٔ مشخصه، باید معادله را حل کنیم و ریشه های معادله را بیابیم.

در این مرحله دو حالت کلی رخ می دهد:

۱) معادله تعدادی ریشهٔ حقیقیِ دو-به-دو متمایز دارد.

۲) معادله تعدادی ریشهٔ حقیقی دارد که برخی از ریشه ها تکراری هستند.

راهنمایی: یعنی مثلاً چهارمین ریشه، در معادلهٔ $(x - r4)^m$ ظاهر شود. در این حالت گوییم ریشهٔ چهارم تکراری از درجه (مرتبهٔ) m است.

۳) معادله ریشه های موهومی دارد. **که در حیطهٔ درس ما نیست**.

ادامه در اسلاید بعد

nastooh@aut.ac.ir

اسلاید مهم. این پاسخ را به عنوان حالت کلی در همه جا به کار برید.

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

در حالت اول که معادلهٔ مشخصه k تا ریشهٔ متمایز دارد، پاسخ رابطه به فرم زیر است:

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \dots + C_k r_k^n$$

حال باید به کمک مقادیر اولیهٔ رابطهٔ بازگشتی، ضرایب C را به دست آورد.

نکته: ممکن است در صورت سوال، از مقادیر اولیه تعداد کمتری را داده باشند، که در این صورت باید به تعداد نیاز از مقادیر اولیه را محاسبه کرد.

nastooh@aut.ac.ir

اسلاید مهم. این پاسخ را به عنوان حالت کلی در همه جا به کار برید.

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

در حالت دوم که معادله k تا ریشهٔ حقیقی دارد اما برخی از ریشه ها تکراری هستند.
پاسخ رابطه به فرم زیر است: (فرض کنیم ریشهٔ pام تکراری از مرتبهٔ m است)

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \dots + \underbrace{C_{p0} n^0 r_p^n + C_{p1} n^1 r_p^n + \dots + C_{pm-1} n^{m-1} r_p^n}_{\text{به ازای ریشهٔ } p \text{ ام که تکراری از مرتبهٔ } m \text{ بود}} + \dots + C_k r_k^n$$

حال باید به کمک مقادیر اولیهٔ رابطهٔ بازگشتی، ضرایب C را به دست آورد.

نکته: ممکن است در صورت سوال، از مقادیر اولیه تعداد کمتری را داده باشند، که در این صورت باید به تعداد نیاز از مقادیر اولیه را محاسبه کرد.

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} = (2n+1)4^n \qquad for\ n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 12 \end{cases}$$

داریم: $d=1$ و $b=4$، حال معادلهٔ مشخصه را می نویسیم:

$$(r-3)\ (r-4)^2 = 0$$

پس دو ریشه داریم: یکی $r_1=3$ و دیگری $r_2=4$ که ریشه از مرتبهٔ دو است.

پس فرمت کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$t_n = C_1 3^n + C_2 4^n + C_3 n 4^n$$

در انتها باید مقادیر ثابت C_1 و C_2 و C_3 را به دست آوریم.

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} = (2n+1)4^n \qquad for\ n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 12 \end{cases}$$

برای به دست آوردن مقادیر ثابت سه گانه، چون سه مجهول داریم، باید سه جملهٔ اول رابطه را از صورت سوال به دست آوریم. پس داریم:

$t_0 = C_1+C_2 = 0$

$t_1 = 3C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 12$

$t_2 = 9C_1 + 16C_2 + 32C_3 = 116$

پس خواهیم داشت: $C_1=20$ و $C_2=-20$ و $C_3=8$

بنابرین جواب نهایی برابر است با:

$t_n = 20\times3^n \ -20\times4^n + 8n4^n$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = n - 1 \qquad for\; n > 0 \\ \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ b و d قدری تامل کنیم. می توان n-1 را به صورت $(n\text{-}1)1^n$ نوشت.

پس داریم: d=1 و b=1.

حال معادلهٔ مشخصه را داریم:

$$(r-1)\,(r-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-1)^3 = 0$$

پس ریشهٔ r=1 از درجهٔ سه خواهیم داشت. فرمت کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: رابطهٔ بازگشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = n - 1 \qquad for\, n > 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ ثوابت، چون سه مجهول داریم، پس سه جملهٔ اول رابطه را از صورت سوال به دست می آوریم. پس داریم:

$$a_0 = C_1 = 0$$
$$a_1 = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$
$$a_2 = C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 1$$

پس ثوابت برابرند با: $C_1=0$ و $C_2= -\frac{1}{2}$ و $C_3= \frac{1}{2}$.

پاسخ نهایی برابر است با:

$$a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

نکته مهم:

اگر در معادلات ناهمگن، در f(n) چند عدد ثابت داشتیم که به توان n رسیده اند (و به تبع هر کدام در یک چند جمله ای ضرب شده اند)، آنگاه به ازای هر کدام باید یک جمله به معادلهٔ مشخصه اضافه کنیم.

بنابراین حالت کلی روابط بازگشتی با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} + \dots + C_{n-k} a_{n-k} = p_1(n).b_1^n + p_2(n).b_2^n + \dots + p_m(n).b_m^n$$

بدیهیست که معادلهٔ مشخه به صورت زیر خواهد بود:

$$(C_n r_k + C_{n-1} r_{k-1} + \dots + C_{n-k})\, (r-b_1)^{d1+1} + (r-b_2)^{d2+1} + \dots + (r-b_m)^{dm+1} = 0$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: فرم کلی حل رابطهٔ بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n.4^n + 3$$

داریم: $p_1(n)=n.4^n$ و $p_2(n)=3$ پس خواهیم داشت: $d_1=1$ و $b_1=4$ و همچنین $d_2=0$ و $b_2=1$.

پس معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است:

$$(r^2 - 3r + 2)\,(r - 4)^2\,(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (r - 2)\,(r - 1)\,(r - 4)^2\,(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)^2\,(r - 4)^2\,(r - 2) = 0$$

پس از حل معادله ریشه های زیر را خواهیم داشت:

$r_1=2$ و $r_2=1$ مضاعف و $r_3=4$ مضاعف

پس برای فرمت کلی پاسخ داریم:

$$a_n = C_1 2^n \quad + \quad C_2 + C_3 n \quad + C_4 4^n + C_5 n 4^n$$

nastooh@aut.ac.ir

حل روابط بازگشتی

- حل روابط بازگشتی ناهمگن (و حتی همگن)، با ضرایب ثابت

مثال: فرم کلی حل رابطهٔ بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n + n$$

داریم:

$p_1(n)=2^n=2^n1^0$ و $p_2(n)=n=1^nn^1$ پس خواهیم داشت: $d_1=0$ و $b_1=2$ و همچنین $d_2=1$ و $b_2=1$.

پس معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است:

$$(r^2 - 5r + 4)\,(r - 2)^1\,(r - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)\,(r - 4)\,(r - 4)^2\,(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)^3\,(r - 4)\,(r - 2) = 0$$

پس از حل معادله ریشه های زیر را خواهیم داشت:

$r_1=1$ از درجهٔ ۳ و $r_2=4$ و $r_3=2$

پس برای فرمت کلی پاسخ داریم:

$$a_n = C_1 + C_2n + C_3n^2 \quad + \quad C_44^n \quad + \quad C_52^n$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

نکته مهم: معمولاً منظور از مرتبهٔ اجرایی یک الگوریتم بازگشتی، این است که این تابع به ازای ورودیِ n چند بار خود را فراخوانی می کند؟؟؟

به عبارتی می توان گفت: عمل اصلی را در این حالت صدا زدن تابع در نظر میگیریم. حال چند بار تابع صدا زده می شود؟

راه اول:

جایگذاری و کشیدن درختن فراخوانی و در نهایت حدس زدن تعداد فراخوانی ها به ازای n

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: به نظر شما مرتبهٔ اجرایی الگوریتم بازگشتی محاسبهٔ فاکتوریل چیست؟

منظور این است که به ازای ورودیِ n، چندبار خود را فراخوانی می کند؟

تابع بازگشتی فاکتوریل به صورت زیر است:

```
int fact(n)
{
    if (n = = 1) return  1;
     else  return  n*fact(n-1);
}
```

یک بار فراخوانی خود تابع

حال اگر a_n تعداد فراخوانی های این تابع باشد، می توان نوشت:

$$\begin{cases} a_n = 1 + a_{n-1} & for\ n > 1 \\ a_1 = 1 & \end{cases}$$

به راحتی و با تجسم درخت فراخوانی می توان دریافت که $a_n=n$، و در نتیجه:

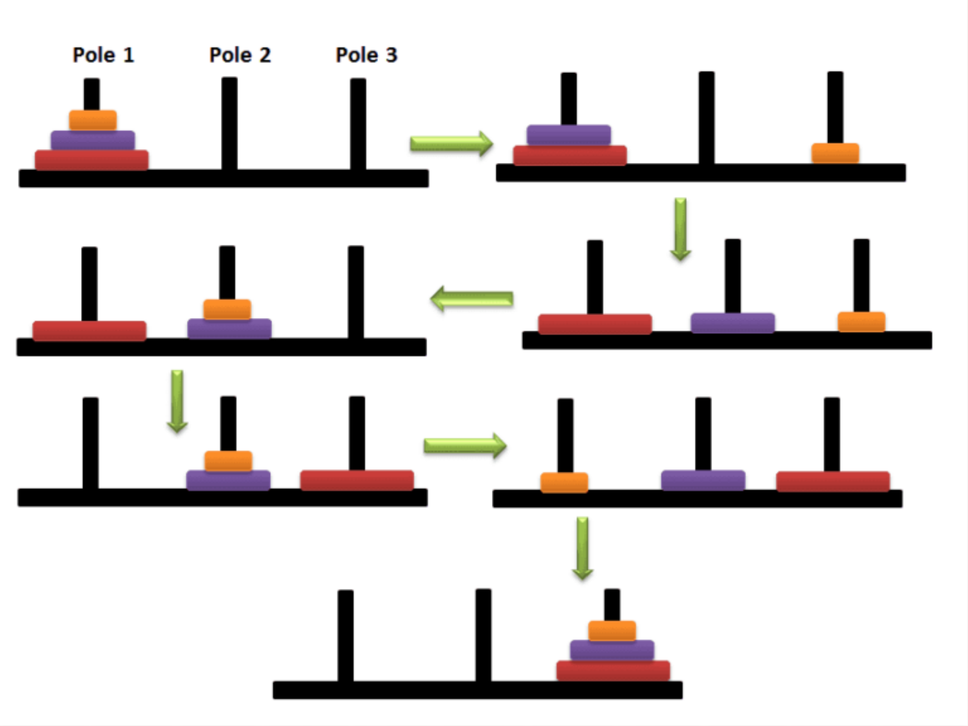
$$a_n = O(n)$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: مسالهٔ کلاسیک برج های هانوی را (از درس ساختمان داده) مرور کنید. مرتبهٔ اجرایی آن را تخمین بزنید.

یادآوری:



مرتبۀ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: مسالۀ کلاسیک برج های هانوی را (از درس ساختمان داده) مرور کنید. مرتبۀ اجرایی آن را تخمین بزنید.

شبه کد تابع هانوی به صورت زیر نوشته می شود:

```
void Hanoi (int  n, A, B, C)
{
   if  (n= = 1) move a disk from A to C;
   else {
      Hanoi (n-1, A, C, B);
      move a disk from A to C;
      Hanoi (n-1, B, A, C)
   }
}
```

بنابراین اگر a_n تعداد فراخوانی های تابع هانوی باشد، به ازای n داریم:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & if\ n > 1 \\ a_n = 1 & if\ n = 1 \end{cases}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: مسالهٔ کلاسیک برج های هانوی را (از درس ساختمان داده) مرور کنید. مرتبهٔ اجرایی آن را تخمین بزنید.

با توجه به رابطهٔ بازگشتی آن، می توان درخت فراخوانی آن را حدس زد. ب این ترتیب که برای $n=4$، تعداد ۱۵ فراخوانی خواهیم داشت و به ازای n تعداد فراخوانی ها برابر با 2_n-1 است که در نتیجه این تابع از مرتبهٔ $O(2^n)$ است.

مرتبۀ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: مرتبۀ اجرایی تابع بازگشتی زیر را به دست آورید. جهت سادگی عدد n را زوج در نظر بگیرید.

```
int  f (int  n)
{
     if (n<=2)  return  1;
     else  return  f(n-2) * f(n-2);
}
```

با توجه به تابع می توانیم رابطۀ بازگشتی تعداد فراخوانی ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} a_n = 1 + 2a_{n-2} & for\, n > 2 \\ a_1 = 1 & if\ n = 1, 2 \end{cases}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: مرتبهٔ اجرایی تابع بازگشتی زیر را به دست آورید. جهت سادگی عدد n را زوج در نظر بگیرید.

برای nهای مختلف، تعداد فراخوانی های زیر را حدس میزنیم:

$a_2=1$

$a_4=3$

$a_6=7$

$a_8=15$

$a_{10}=31$

$a_{12}=63$

پس می توانیم حدس بزنیم: $a_n = 2^{\frac{n}{2}} - 1$ یعنی: $O(2^{\frac{n}{2}})$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

نکتهٔ مهم: یک بار سه مثال زده شده را دوباره مرور کنیم:

مثال اول، فرم صدا زدن: $f(n-1)$ و در نتیجه $a_n=1+a_{n-1}$ و مرتبهٔ اجرایی: $O(n)$

مثال دوم، فرم صدا زدن: $2f(n-1)$ و در نتیجه $a_n=1+2a_{n-1}$ و مرتبهٔ اجرایی: $O(n^2)$

مثال سوم، فرم صدا زدن: $2f(n-2)$ و در نتیجه $a_n=1+2a_{n-2}$ و مرتبهٔ اجرایی: $O(2^{\frac{n}{2}})$

پس:

1. **هر چه تابع خودش را بیشتر صدا بزند، کندتر خواهد بود.**
2. **هر چه در هر گام مقدار بیشتری از n کسر شود، تابع سریع تر خواهد بود.**

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال چهارم: اگر برای یک تابع بازگشتی فرضی، رابطهٔ بازگشتی مربوط به تعداد فراخوانی ها را به صورت زیر تخمین زدیم، مرتبهٔ اجرایی تابع مذکور چیست؟

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} & for\ n > 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری و تجسم درخت فراخوانی این تابع می توان فهمید، مرتبهٔ زمانی تابع فرضی ما $O(n^2)$ است.

nastooh@aut.ac.ir

مرتبۀ اجرایی توابع بازگشتی

قضیۀ مهم:

در حالت کلی می توان اثبات کرد به ازای اعداد ثابت و مثبت a و b و c اگر رابطۀ بازگشتیِ فراخوانی یک تابع بازگشتی به صورت زیر باشد:

$$T_n = aT_{n-b} + c$$

آنگاه برای مرتبۀ اجرایی خواهیم داشت:

۱) اگر ثابت a برابر با یک باشد: $\theta\left(\frac{n}{b}\right) = \theta(n)$

۲) اگر ثابت a غیر از یک باشد: $\theta(a^{\frac{n}{b}})$

چند مثال:

$$a_n = 3a_{n-2} + 5 \Rightarrow \theta(3^{\frac{n}{2}})$$

$$a_n = a_{n-1} + 1 \Rightarrow \theta(n)$$

$$a_n = 2a_{n-2} + 1 \Rightarrow \theta(2^{\frac{n}{2}})$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبۀ اجرایی توابع بازگشتی

نکتۀ بسیار مهم:

برای یافتن مرتبۀ زمانی اجرای توابع بازگشتی، پس از آنکه رابطۀ بازگشتی تعداد فراخوانی ها را به دست آوردیم، عدد ثابت c تاثیری در مرتبه اجرایی ندارد. بنابراین بدون عدد ثابت و با کمک مبحث حل روابط بازگشتی (در اسلایدهای قبلی) می توانیم مرتبۀ اجرای توابع را به دست آوریم.

مثال: فرض کنید برای یک تابع بازگشتی، رابطۀ تعداد فراخوانی ها به صورت زیر است. به کمک حل روابط بازگشتی، مرتبۀ اجرایی تابع فرضی را محاسبه کنید.

$$a_n = 3a_{n-2} + 5$$

در این حالت از عدد ۵ صرف نظر می کنیم. پس داریم:

$$a_n - 3a_{n-2} = 0$$

معادلۀ مشخصه:

$$r^2 - 3 = 0$$

پس ریشه برابر است با:

$$r = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبۀ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: فرض کنید برای یک تابع بازگشتی، رابطۀ تعداد فراخوانی ها به صورت زیر است. به کمک حل روابط بازگشتی، مرتبۀ اجرایی تابع فرضی را محاسبه کنید.

$$a_n = 3a_{n-2} + 5$$

بنابراین داریم:

$$a_n = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

پس داریم:

$$\theta\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^n = \theta\left(3^{\frac{n}{2}}\right)$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال: فرض کنید برای یک تابع بازگشتی، رابطهٔ تعداد فراخوانی ها به صورت زیر است. به کمک حل روابط بازگشتی، مرتبهٔ اجرایی تابع فرضی را محاسبه کنید.

$$a_n = n + a_{n-1}$$

پس داریم:

$$a_n - a_{n-1} = n$$

برای حل معادلهٔ ناهمگن فوق، معادلهٔ مشخصهٔ زیر را می نویسیم:

$$(r-1)^1 (r-1)^2 = 0$$

پس یک ریشهٔ درجهٔ ۳ خواهیم داشت که $r=1$ است.

مراحل حل رابطه را می توان کامل کرد، و برای مرتبهٔ زمانی خواهیم داشت:

$$\theta(n^2)$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۴: مرتبهٔ زمانی الگوریتمی که رابطهٔ فراخوانی آن به صورت زیر است کدام گزینه است:

$$T(n)\begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 3T(n-1)+4T(n-2) & otherwise \end{cases}$$

1) n^2
2) 4^n
3) $2^n \log n$
4) $n^4 \log n$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۴: مرتبهٔ زمانی الگوریتمی که رابطهٔ فراخوانی آن به صورت زیر است کدام گزینه است:

$$T(n)\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n=1\\ 3T(n-1)+4T(n-2) & otherwise\end{cases}$$

معادلهٔ مشخصه:

$r^2 - 3r - 4 = 0$

$\Rightarrow (r + 1)(r - 4) = 0$

پس دو ریشهٔ ساده داریم: 1- و 4

پس فرم کلی پاسخ برابرست با:

$C_1(-1)^n + C_2 4^n$

پس: $O(n^4)$

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

کمی بحث: نظرتان در مورد توابعی که رابطهٔ بازگشتی فراخوانی های آنها به صورت زیر است، چیست؟

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + 1$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

قضیه برای حالت لگاریتمی:

اگر با ثوابت a و b و c داشته باشیم:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + c$$

خواهیم داشت:

۱) اگر a برابر یک باشد:

$$\theta(\log_b n)$$

۲) اگر a بزرگتر از یک باشد:

$$\theta\left(n^{\log_b a}\right) = \theta\left(a^{\log_b n}\right)$$

چند مثال:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \theta(\log_2 n)$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + 7 \Rightarrow \theta(n^{\log_5 3})$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

قضیهٔ مَستِر (اصلی):

زمان اجرای بسیاری (نه همه) از برنامه های بازگشتی به کمک این قضیه به دست می آید.

این قضیه برای روابط به فرم زیر برقرار است:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

در این صورت بر اساس f(n) سه حالت زیر برقرار است:

۱) اگر $f(n)\in\theta(n^c)$ باشد و $c < \log_b a$ که داریم: $T(n)\in\theta(n^{\log_b a})$

۲) اگر $f(n)\in\theta(n^c)$ باشد و $c = \log_b a$ که داریم: $T(n)\in\theta(n^c \log n)$

۳) اگر $f(n)\in\theta(n^c)$ باشد و $c > \log_b a$ که داریم: $T(n)\in\theta(f(n))$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

در واقع در قضیهٔ اصلی داریم:

$$T(n) = \underbrace{aT\left(\frac{n}{b}\right)}_{\theta(n^{\log_b a})} + \underbrace{f(n)}_{\theta(n^c)}$$

حال سه حالت داریم، که مهمترین حالت، وقتی است که هر دو بخش از مرتبهٔ یکسانی برخوردار باشند که در این صورت داریم:

$$T(n) \in \theta(n^c \log n)$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

داریم (حالت اول قضیه اصلی):

$$\underbrace{3T\left(\frac{n}{3}\right)}_{\theta(n^1)} + \underbrace{n^2}_{\theta(n^2)}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n) \in \theta(n^2)}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

داریم (حالت سوم قضیه اصلی):

$$\underbrace{9T\left(\frac{n}{3}\right)}_{\theta(n^2)} + \underbrace{n}_{\theta(n)}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n) \in \theta(n^2)}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$$

داریم (حالت دوم قضیه اصلی):

$$\underbrace{4T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\theta(\boldsymbol{n^2})} + \underbrace{\log n}_{\theta(\boldsymbol{\log n})}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n) \in \theta(n^2)}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$$

داریم:

$$\underbrace{3T\left(\frac{n}{4}\right)}_{\theta(n^{0.79})} + \underbrace{n\log n}_{\theta(n\log n)}$$

$$\theta(\boldsymbol{n}^{\mathbf{0.79}}) < \theta(\boldsymbol{n\ log\ n})$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n)} \in \theta(\boldsymbol{n\ log\ n})$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + 2$$

داریم:

$$\underbrace{T\left(\frac{n}{3}\right)}_{\theta(n^0) = \theta(1)} + \underbrace{2}_{\theta(1)}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n) \in \theta(\log n)}$$

بدون قضیه اصلی نیز به همین نتیجه رسیدیم.

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۴:

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{9}\right) + n\ lon\ n$$

۱) $\theta(\boldsymbol{log\ n})$

۲) $\theta(\boldsymbol{n})$

۳) $\theta(\boldsymbol{n^2 log\ n})$

۴) $\theta(\boldsymbol{nlog\ n})$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۴:

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{9}\right) + n\ lon\ n$$

داریم:

$$\underbrace{8T\left(\frac{n}{9}\right)}_{\theta(n^{0.94})} + \underbrace{n \log n}_{\theta(n\ log\ n)}$$

در نتیجه:

$$\boldsymbol{T(n) \in \theta(n\ log\ n)}$$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد آزاد ۷۸:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn$$

۱) $\boldsymbol{O(\log_2 n)}$
۲) $\boldsymbol{O(n^{2.81})}$
۳) $\boldsymbol{O(n\log_2 n)}$
۴) $\boldsymbol{O(n^2)}$

حالت میانی قضیه اصلی، پس گزینهٔ ۳

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۶:

$$T(n) = 100T\left(\frac{n}{99}\right) + \log n!$$

۱) $\theta(\boldsymbol{n^2})$

۲) $\theta(\boldsymbol{n^{2.81}})$

۳) $\theta(\boldsymbol{n}^{\log_{99}\boldsymbol{100}})$

۴) $\theta(\boldsymbol{n\, log^2 n})$

nastooh@aut.ac.ir

مرتبهٔ اجرایی توابع بازگشتی

مثال، ارشد دولتی ۸۶:

$$T(n) = 100T\left(\frac{n}{99}\right) + \log n!$$

$$\underbrace{100T\left(\frac{n}{99}\right)}_{\theta(n^{\log_{99} 100})} + \underbrace{\log n!}_{\theta(\log n!)}$$

همیشه به خاطر داشته باشید، اگر $a>1$ باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^a > n \log n > \log n!$$

و میدانیم که $\log_{99} 100 > 1$ است، پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

nastooh@aut.ac.ir

منابع

[1] Richard E. Neapolotan, **"Foundations of Algorithms,"** 5th Ed. (Download Link)

برای دانلود کتاب ها، اسلایدها و نمونه پروژه های درسی به سایت
www.nastooh.com بخش دانشجویان مراجعه کنید.

پایان